[This question paper contains 03 printed pages]

[इस प्रश्न पत्र में 03 मुद्रित पृष्ठ हैं]

Himachal Pradesh Administrative Service Combined Competitive (Main / Written) Examination, 2020

हिमाचल प्रदेश प्रशासनिक सेवा संयुक्त प्रतियोगी (मुख्य / लिखित) परीक्षा, 2020

MATHEMATICS (PAPER-I)

गणित (पेपर-I)

Time allowed: Three Hours | Maximum Marks: 100

निर्धारित समय: तीन घंटे | अधिकत्तम अंक: 100

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें।

1. There are EIGHT questions printed both in English & Hindi.
   इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिंदी दोनों में छपें हैं।
2. Candidate has to attempt FIVE questions in all in English or Hindi.
   उम्मीदवार को कुल पांच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में देने हैं।
3. Question No.1 is compulsory. Out of the remaining SEVEN questions, FOUR are to be attempted.
   प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question / part is indicated against it.
   सभी प्रश्नों के समान अंक हैं। प्रत्येक प्रश्न / भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।
5. Write answers in legible handwriting. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
   सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखें। प्रश्न के प्रत्येक भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
6. Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.
   प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो। छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णत: काट दीजिये।
7. Re-evaluation / Re-checking of answer book of the candidate is not allowed.
   उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन / पुन: जाँच की अनुमति नहीं है।

1. (a) Obtain the general solution of the following differential equation:

$x\frac{dy}{dx} + (2-x)y = e^{3x}$, x>0.

निम्नलिखित अवकल समीकरण का व्यापक हल निकालिये |

$x\frac{dy}{dx} + (2-x)y = e^{3x}$, x>0. (5)

(b) Find a linear transformation $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that its image space is the plane $x + y + z = 0$.

एक रैखिक रूपांतरण $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ज्ञात कीजिए जिसकी प्रसार समष्टि समतल $x + y + z = 0$ है | (5)

(c) If $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function such that $f(0) = f(6)$, then show that $f(x) = f(x+3)$ for some x in $[0,3]$.

यदि $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$ एक सतत फलन ऐसा है कि $f(0) = f(6)$, तो दर्शाइए कि $[0,3]$ में किसी x के लिए $f(x) = f(x+3)$ है | (5)

(d) Find velocity of a particle moving on the surface of a right circular cylinder of radius b.

त्रिज्या b के एक लम्ब वृत्तीय बेलन की सतह पर गतिमान कण का वेग ज्ञात कीजिए | (5)

2. (a) Define a basis of a vector space. Find a basis of the subspace of the vector space $\mathbb{R}^4$ ($\mathbb{R}$) generated by the subset

$\{(1,1,0,-1), (2,4,6,0), (-2,-3,-3,1), (-1,-2,-2,2), (4,6,4,-6)\}$.

सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए। सदिश समष्टि $\mathbb{R}^4$ ($\mathbb{R}$) के उपसमष्टि का आधार ज्ञात कीजिए जो उपसमुच्चय

$\{(1,1,0,-1), (2,4,6,0), (-2,-3,-3,1), (-1,-2,-2,2), (4,6,4,-6)\}$

से उत्पन्न है | (10)

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Find an invertible 2×2 matrix P such that PAP^{-1} is a diagonal matrix.

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ । एक व्युत्क्रमीय 2×2 आव्यूह P ज्ञात कीजिए कि PAP^{-1} एक विकर्ण आव्यूह हो जाए। (10)

3. (a) Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के तीन परस्पर लम्बवत स्पर्श तलों के प्रतिच्छेदन बिंदु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए। (7)

(b) Show that $\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$ does not exist.

दिखाइये कि $\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$ का अस्तित्व नहीं है | (7)

(c) Evaluate $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ and $\lim_{x\to 0^+}(1 - sinx)^{1/x}$.

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ और $\lim_{x\to 0^+}(1 - sinx)^{1/x}$ का मान ज्ञात कीजिए | (6)

4. (a) State a set of sufficient conditions for local maximum or minimum at a point for a twice continuously differentiable function $f(x, y)$. Test the function $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$ for local maximum or minimum.

द्वितीय कोटि के सतत अवकलन वाले फलन $f(x, y)$ के किसी बिंदु पर स्थानीय उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंधों का कथन लीखिए | फलन $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$ के स्थानीय उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ बिन्दुओं के लिए परीक्षण कीजिए | (6)

(b) Let $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be defined by $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$. Compute the total derivative of f at the point (1,2).

मान लीजिए फलन $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ से परिभाषित है | बिंदु (1,2) पर f के पूर्ण अवकलज की गणना कीजिए | (4)

(c) Reduce the following equation
$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$
to the standard form. Find the nature of the conicoid, its center and equation of its axes.

समीकरण $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$ को प्रामाणिक रूप में व्यक्त कीजिए| शांकवज की प्रकृति, उसका केंद्र और उसके अक्षों का समीकरण ज्ञात कीजिए। (10)

5. (a) Find the volume of the solid region that is interior to both the sphere $x^2+y^2 + z^2 = 4$ and the cylinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

उस ठोस क्षेत्र का आयतन ज्ञात कीजिए जो गोले $x^2+y^2 + z^2 = 4$ और बेलन $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ का आंतरिक भाग है। (10)

(b) A particle of mass m moves with a central attractive force $m\,\mu\,(r^5 - c^4 r)$ towards the origin being projected from an apse at distance c with velocity $\sqrt{(\frac{2\mu}{3})}\ c^3$. Show that the equation to the central orbit is $x^4 + y^4 = c^4$.

द्रव्यमान m का एक कण मूल बिंदु की ओर केंद्रीय आकर्षक बल $m\,\mu\,(r^5 - c^4 r)$ से गतिमान है। उसको c दूरी पर स्थिति अप्स बिंदु से $\sqrt{(\frac{2\mu}{3})}\ c^3$ वेग के साथ प्रक्षेपित किया जाता है। दिखाएँ कि केंद्रीय कक्षा का समीकरण $x^4 + y^4 = c^4$ है। (10)

6. (a) Write the statement of Stokes' theorem and verify it for the line integral

$\oint_C [\,(x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz]$,

where C is the boundary of the triangle with vertices $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,6)$.

स्टोक्स के प्रमेय का कथन लिखिए और रेखा समाकल

$\oint_C [\,(x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz]$,

के लिए उसका सत्यापन कीजिए, जहां C उस त्रिभुज की परिसीमा है जिसके शीर्ष (2,0,0), (0,3,0), (0,0,6) पर है। (10)

(b) Define wrench of a system of forces. Three forces P, Q, R act along three straight lines $x = 0,\ y - z = a$; $y = 0,\ z - x = a$ and $z = 0,\ x - y = a$ respectively. Find the vector symmetrical equation of the central axis and the pitch of the equivalent wrench.

किसी बल-निकाय के लिये रिंच को परिभाषित करें। तीन बल P, Q, R क्रमशः तीन सरल रेखाओं $x = 0,\ y - z = a$; $y = 0,\ z - x = a$ और $z = 0,\ x - y = a$ के अनुदिश कार्यरत हैं। केंद्रीय अक्ष का सदिश सममित समीकरण ज्ञात कीजिए तथा समतुल्य रिंच की पिच निकालिए। (10)

7. (a) The tangential acceleration of a particle moving along a circle of radius a is λ times the normal acceleration. If its speed at certain time is u, then prove that it will return to the same point after a time

$$\frac{a}{\lambda u}\left(1 - e^{-2\pi\lambda}\right).$$

त्रिज्या a के वृत्त के अनुदिश गतिमान किसी कण का स्पर्शरेखीय त्वरण, अभिलम्बीय त्वरण का λ गुना है। यदि किसी निश्चित समय पर किसी बिंदु पर इसकी गति u हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसी बिंदु पर पुन: वापस आने का समय

$$\frac{a}{\lambda u}\left(1 - e^{-2\pi\lambda}\right)$$

होगा। (10)

(b) Solve the following differential equation:

$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2e^x\ , \quad x > 0.$

निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल निकालिए ।

$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2e^x\ , \quad x > 0.$ (10)

8. (a) A heavy uniform rod rests with one end against a smooth vertical wall and with a point in its length resting on a smooth peg. Find the position of equilibrium, and show that it is unstable.

एक भारी एकसमान छड़ का एक सिरा चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे तथा इसकी लंबाई में छड़ का एक बिंदु एक चिकनी खूंटी पर टिका है। संतुलन की स्थिति ज्ञात कीजिए, और दिखाइए कि यह अस्थाई संतुलन है। (10)

(b) Apply the method of power series to solve the following differential equation:

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$

घात श्रेणी विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिये।

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$ (10)

*****